1994年　東大数学　文系第4問.

(1)

$f_n(x) = f(x) + \underbrace{\int_0^c f_{n-1}(t)\,dt}_{=a_n}$ 定数なので. $=a_n$ とおく

に対し.

$f_n(x) = f(x) + a_n$

但し. $a_n = \int_0^c f_{n-1}(t)\,dt$ とする。

$f_{n-1}(x) = f(x) + a_{n-1}$

すると.

$f_n(x)$と$f_{n-1}(x)$の関係式なので漸化式にしたい。

$$a_n = \int_0^c f_{n-1}(t)\,dt$$

$$= \int_0^c \{f(t) + a_{n-1}\}\,dt$$

$$= \boxed{\int_0^c f(t)\,dt} + \int_0^c a_{n-1}\,dt$$

ここで. $\boxed{\int_0^c f(t)\,dt} = \int_0^c (-4t^3 + 3t^2)\,dt$

$= \left[-t^4 + t^3\right]_0^c = -c^4 + c^3$ なので.

$a_n = -c^4 + c^3 + \int_0^c a_{n-1}\,dt$　a_{n-1}は定数なので. $a_{n-1}\int_0^c dt = a_{n-1} \times c$

$= -c^4 + c^3 + c \cdot a_{n-1}$

漸化式完成!

$a_n = c \cdot a_{n-1} + c^3 - c^4$

特性方程式
$\alpha = c\alpha + c^3 - c^4$
$\alpha(1-c) = c^3(1-c)$
$\alpha = c^3$ ($\because c \neq 1$)

$a_n - c^3 = c(a_{n-1} - c^3)$

これは. 初項 $a_1 - c^3$ (但し $a_1 = \int_0^c f(t)\,dt = c^3 - c^4$ と定義する。問題文に書かれている.)

公比 c

の等比数列を表している. $f_1(x) = f(x) + \underbrace{\int_0^c f(t)\,dt}_{=a_1 と定義}$

よって

$a_n = (c^3 - c^4 - c^3) \times c^{n-1} + c^3$　$f_2(x) = f(x) + \underbrace{\int_0^c f_1(t)\,dt}_{=a_2 と定義}$

$= -c^{n+3} + c^3$

とすれば. $n \geqq 1$ で. a_n や $f_n(x)$ が定義できる。

よって.

$$f_n(x) = f(x) + a_n$$

$$= -4x^3 + 3x^2 - c^{n+3} + c^3$$

(2)

方針

$0 < x < 1$ のとき

$f_n(x) = 0$ をみたす x がただ1つ存在する

⇕

$y = f_n(x)$ が $y = 0$ (x軸) と $0 < x < 1$ で1回だけ交わる。

と言い換えて. グラフを描く。

$f_n(x) = -4x^3 + 3x^2 - c^{n+3} + c^3$ より.

$f_n'(x) = -12x^2 + 6x$

$= -12x\left(x - \frac{1}{2}\right)$

増減表は.

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$f_n'(x)$		+	0	−	
$f_n(x)$	($f_n(0)$)	↗	$f_n(\frac{1}{2})$	↘	($f_n(1)$)

$0 < c < 1$ より $0 < c^n < 1$

$f_n(0) = -c^{n+3} + c^3 = \underbrace{c^3}_{>0}\underbrace{(1 - c^n)}_{>0} > 0$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{4} - c^{n+3} + c^3$

$= \frac{1}{4} - c^{n+3} + c^3 > 0$　$\frac{1}{4} + f_n(0)$ なので. 増減表からも明らか

$f_n(1) = -4 + 3 - c^{n+3} + c^3$

$= -1 + c^3(1 - c^n) < 0$

($\because$ $0 < c < 1$ より. $0 < c^3 < 1$. $0 < 1 - c^n < 1$ なので. $0 < c^3(1 - c^n) < 1$)

よって. 確かに $y = f_n(x)$ は $0 < x < 1$ で1度だけ x軸と交わる。

以上. 証明終.

概形はこう